16. Neka je f cijela funkcija koja zadovoljava uslov $|f(z)| \leq e^x$, gdje je $x = \mathrm{Re}\ z$. Dokazati da postoji konstanta $c \in \mathbb{C}, |c| \leq 1$, takva da je $f(z) = ce^z$.

17. Neka je f cijela funkcija. Dokazati sljedeća tvrdjenja:

    (a) Ako je $f(z + 2\pi) = f(z)$ i $f(z + 2\pi i) = f(z)$ za svako $z \in \mathbb{C}$. tada je f konstanta.

    (b) Ako je $|f(z)| \geq M$ za svako $z \in \mathbb{C}$, tada je f konstanta.

    (c) Ako je e^f ograničena funkcija, tada je f konstanta.

    (d) Ako je $\mathrm{Re}\ f$ ograničena funkcija, tada je f konstanta.

    (e) Ako $f(z) \to \infty$ kada $|z| \to \infty$, tada je $f(z) \equiv 0$.

5 Laurentov red. Izolovani singulariteti

U prethodnom paragrafu dokazali smo da se svaka funkcija koja je analitička u krugu može predstaviti stepenim redom, i obrnuto, da je funkcija koja je predstavljena stepenim redom analitička u krugu konvergencije tog reda. Za formulu kojom se uspostavlja jednakost analitičke funkcije i nekog stepenog reda govorili da je Taylorova formula. Laurentova formula je uopštenje Taylorove formule; ona se odnosi na funkcije analitičke u kružnom prstenu, a članovi odgovarajućeg reda su funkcije oblika $a(z - z_0)^n$, pri čemu stepeni n mogu biti proizvoljni cijeli brojevi.

Teorema 5.1 (Laurentova teorema)**.** *Ako je funkcija $f : K \mapsto \mathbb{C}$ analitička u prstenu $K = \{z \in C : r < |z - z_0| < R\} \neq \emptyset$, onda je*

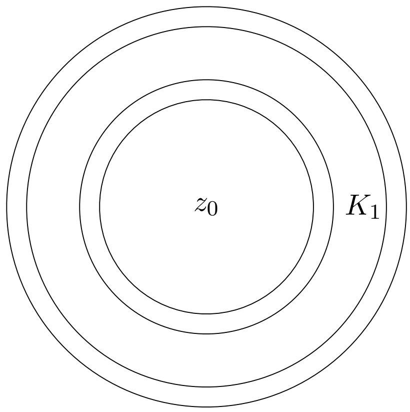
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,\ z \in K,$$

gdje je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}\, d\eta, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

pri čemu je γ kružnica $|\eta - z_0| = \rho, r < \rho < R$.

Dokaz. Neka je $z \in K$ fiksirana tačka iz prstena K i r_1 i R_1 pozitivni brojevi, takvi da je $r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R$. Na osnovu Cauchyeve integralne formule slijedi da je tada



Slika 3.4: Laurentova teorema i četiri kruga

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z),$$

gdje je

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta - z_0| = R_1} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta - z_0| = R_1} \frac{f(\eta)}{\eta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0}} d\eta,$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta - z_0| = r_1} \frac{f(\eta)}{\eta - z} d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta - z_0| = r_1} \frac{f(\eta)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\eta - z_0}{z - z_0}} d\eta.$$

Ako je $|\eta - z_0| = R_1$, tada je $\left| \frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right| < 1$, pa je

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0} \right)^k.$$

Slično, ako je $|\eta - z_0| = r_1$, slijedi da je $\left| \frac{\eta - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r_1}{\rho} < 1$, pa je

$$\frac{1}{1 - \frac{\eta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\eta - z_0}{z - z_0} \right)^k.$$

Na osnovu Weierstrassovog kriterijuma o ravnomjernoj konvergenciji slijedi da u oba slučaja prethodni geometrijski redovi konvergiraju ravnomjerno po η, pa se mogu integraliti član po član. Integraljenjem dobijamo

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=R_1}\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\eta-z_0}}\,d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=R_1}\left[\frac{f(\eta)}{\eta-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\eta-z_0}\right)^k\right]d\eta = \sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k, \end{aligned}$$

gdje je

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=R_1}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{k+1}}\,d\eta, k=0,1,\ldots.$$

Takodje je

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=r_1}\frac{f(\eta)}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{\eta-z_0}{z-z_0}}\,d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=r_1}\left[\frac{f(\eta)}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\eta-z_0}{z-z_0}\right)^k\right]d\eta \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}b_l\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^l = \sum_{k=-1}^{k=-\infty}c_k(z-z_0)^k, \end{aligned}$$

gdje je

$$b_l = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=r_1}f(\eta)(\eta-z_0)^l d\eta, l=0,1,\ldots,$$

$$c_k = b_{-k+1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta-z_0|=r_1}\frac{f(\eta)}{(\eta-z_0)^{k+1}}d\eta, k=0,1,\ldots.$$

Na kraju, primijetimo da u formulama za koeficijente c_k, prema Cauchyevoj formuli za višestruko povezane oblasti, integraciju po kružnicama $|\eta-z_0| = r_1$ i $|\eta-z_0| = R_1$ možemo zamijeniti integracijom po proizvoljnoj kružnici $\gamma = \{\eta : |\eta-z_0| = \rho\}$, gdje je $r < \rho < R$ (i čak po proizvoljnoj konturi koja obuhvata kružnicu $|\eta-z_0| = r$ i leži unutar kružnice $|\eta-z_0| = R$). Odavde slijedi tvrdjenje teoreme. $\square$

Red

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, z \in K,$$

gdje je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z)^{n+1}}\,d\eta, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

naziva se Laurentovim redom funkcije f. Takodje se govori da je formulom iz tvrdjenja teoreme dato razlaganje funkcije f u Laurentov red. Pri tome se za red $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ kaže da je *pravilni dio* a za red $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ da je *glavni dio* Laurentovog reda $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$.

U sljedećoj teoremi dokazuje se jedinstvenost razlaganja analitičke funkcije u Laurentov reda

Teorema 5.2. *Ako je funkcija $f : K \mapsto \mathbb{C}$ analitička u prstenu $K = \{z \in C : r < |z - z_0| < R\}$, onda se ona u Laurentov red razlaže na jedinstven način.*

Dokaz. Neka je

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, z \in K.$$

Množeći gornju jednakost sa $(z - z_0)^{-n-1}$ i integraleći duž kružnice $|z - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$, dobijamo da je $a_n = c_n$ za svaki cijeli broj n. $\square$

Primjer 5.3. Razvićemo funkciju

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$$

(koja je analitička na skupu $\mathbb{C}\setminus\{0, 1\}$) u Laurentov red po stepenima $(z-1)$ na dva različita načina, odnosno u dva različita prstena. U prstenu $\{z : 0 < |z - 1| < 1\}$ važi

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z}\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1+(z-1)} \\
&= \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n \\
&= \sum_{n=-2}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^n,\ 0 < |z-1| < 1.
\end{aligned}$$

S druge strane, u oblasti $\{z : |z-1| > 1\}$, Laurentov razvoj funkcije f ima oblik

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}\frac{1}{(1-z)^2} \\ &= \frac{1}{(z-1)^3}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} \\ &= \frac{1}{(z-1)^3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-1)^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-3}(-1)^{n+1}(z-1)^n,\ |z-1|>1. \end{aligned}$$

Napomenimo da činjenica da postoje različiti razvoji funkcije f u Laurentv red po stepenima $z-1$ ne protivrječi teoremi o jedinstvenosti Laurentovog reda, jer se tada (i u ovom primjeru) radi o razvojima u različitim oblastima.

Naravno, funkciju možemo razviti i u prstenu $\{z : 0 < |z| < 1\}$ po stepenima z. Naime, tada je

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \sum_{n=-1}^{\infty}(n+2)z^n,\ 0<|z|<1.$$

Primjer 5.4. Razmotrimo dva specijalna slučaja.

(a) Ako je $R = +\infty$ i funkcija f analitička i ograničena u oblasti $\{z : |z-z_0| > r$, tada za svako $n > 0$ i svako $\rho > r$, važi

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}|dz| \le \frac{M}{\rho^n}.$$

odakle, s obzirom da $\rho > r$ može biti proizvolno veliko, slijedi da je $c_n = 0$ za $n > 0$, odnosno, tada je

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n(z-z_0)^n,\ |z-z_0|>r.$$

(b) Ako je $r = 0$ i funkcija f analitička i ograničena u oblasti $\{z : 0 < |z-z_0| < R$, tada za svako $n < 0$ i svako $\rho < R$ važi

$$|c_n| = \frac{1}{2p}\left|\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \le \int_{|z-z_0|=\rho}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}|dz| \le \frac{M}{\rho^{-n}} \to 0$$

kada $\rho \to 0$.

Odavde slijedi da je $c_n = 0$ za $n < 0$, pa je Laurentov red funkcije f u prstenu $0 < |z - z_0| < R$ sadrži sao pravilni dio

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} c_n(z - z_0)^n,\ 0 < |z - z_0| < R.$$

Primijetmo da se u prethodne dvije teoreme (i u prethodnim primjerima) dopušta da je $r = 0$ i (ili) $R = +\infty$. U slučaju $r = 0$, razlaganje funkcije u Laurentov red može biti korišćeno za izučavanje ponašanja funkcije f kada $z \to z_0$.

Definicija 5.5. *Tačka z_0 je izolovani singularitet funkcije f ako postoji pozitivan broj r, takav da je funkcija f analitička u skupu $\{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}$ a nije analitička u krugu $\{z \in C : |z - z_0| < r\}$.*

u

Ako je tačka z_0 izolovani singularitet funkcije f, onda se funkcija f može razložiti u Laurentov red:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n, z \in K = \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Zavisno od toga koliko članova sadrži glavni dio Laurentovog reda funkcije f, singulariteti se klasifikuju na sljedeći način:

(a) Ako je $c_{-n} = 0$ za svako $n \geq 0$, onda se Laurentov red svodi na njegov pravilni dio i tada se kaže da je z_0 *otklonjiv (prividan) izolovani singularitet* funkcije f.

(b) Ako glavni dio Laurentovog reda funkcije f sadrži konačno mnogo članova, tada se kaže da je z_0 pol funkcije f. Pri tome, ako je m prirodan broj takav da je $c_{-m} \neq 0$ i $c_{-k} = 0$ za svako $k > m$, tada se kaže da je z_0 pol reda m funkcije f. Za pol reda $m = 1$ funkcije f kaže se da je *prosti pol* funkcije f..

(c) Ako glavni dio Laurentovog reda funkcije f sadrži beskonačno mnogo članova tada se kaže da je z_0 *esencijalni singularitet funkcije f.*

U sljedećoj teoremi daje se nekoliko kriterijuma pomoću kojih se može utvrditi da li je z_0 otklonjivi izolovani singualritet funkcije f.

Teorema 5.6. *Ako je z_0 izolovani singularitet funkcije f, tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*
(a) Tačka z_0 je otklonjiv izolovani singularitet funkcije f;
(b) Postoje $c_0 \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ takvi da je funkcija

$$\overline{f}(z) = \begin{cases} f(z), & 0 \leq |z - z_0| < r \\ c_0, & z = z_0 \end{cases}$$

analitička u $\{z \in C : |z - z_0| < r\}$.
(c) Postoji $\lim_{z \to z_0} f(z)$.
(d) Postoji $r > 0$, takvo da je funkcija f ogranična na $K(z_0, r) \backslash \{z_0\} = \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}$.

Dokaz. Ako je z_0 otklonjiv singularitet onda je

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots, z \in \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Ako funkciju $\overline{f}$ definišemo stepenim redom

$$\overline{f}(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots, z \in \{z \in C : |z - z_0| < r\}.$$

tada je $\overline{f}$ analitička u krugu $\{z \in C : |z - z_0| < r\}$.
Dakle, $(a) \Longrightarrow (b)$.

Iz (b) slijedi da je $\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \bar{f}(z) = c_0$, što znači da $(b) \Longrightarrow (c)$.

Dalje, ako je ispunjen uslov (c) i ako je $\lim_{z \to z_0} f(z) = c_0$, onda postoji krug $K(z_0, r)$ takav da je $|f(z) - c_0| < 1$ za svako $z \in K(z_0, r)$. Odavde slijedi da je $|f(z)| \leq |c_0| + 1$, odnosno $(c) \Longrightarrow (d)$.

Na kraju, pretpostavimo da je ispunjen uslov (d). Tada je, za dovoljno malo r, funkcija f ograničena na $\{z \in C : |z - z_0| \leq r\}$, pa za za svako $n \in N$ i kružnicu $\gamma = \{z \in C : 0 < |z - z_0| = r\}$ važi:

$$\begin{aligned} |c_{-n}| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{-n+}} d\eta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\eta)|}{|\eta - z_0|^{-n+1}} |dz| \\ &\leq M \frac{1}{2\pi} r^{n-1} \cdot 2\pi r = M r^n \to 0 \text{ kada } n \to \infty. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $c_{-n} = 0$, pa je z_0 otklonjiv singularitet funkcije f. To znači da $(d) \Longrightarrow (c)$. Ukupno, imamo da $(a) \Leftrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow a)$, čime je teorema dokazana. $\square$

Računanjem granične vrijednosti $\lim_{z \to z_0} f(z)$ može se utvrditi i da li je izolovani singularitet z_0 pol funkcije f.

Teorema 5.7. *Izolovani singularitet z_0 funkcije f je pol te funkcije ako i samo ako je* $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \infty$.

Dokaz. Pretpostavimo da je z_0 pol reda $m \geq 1$ funkcije f. Tada postoji $r > 0$, takvo da je

$$f(z) = c_m(z-z_0)^{-m} + \sum_{i=-(m-1)}^{\infty} c_i(z-z_0)^i, z \in \{z \in C : 0 < |z-z_0| < r\}.$$

Odavde slijedi da je z_0 otklonjiv singularitet funkcije

$$g(z) = (z-z_0)^m f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{j-m}(z-z_0)^j, z \in \{z \in C : 0 < |z-z_0| < r\},$$

i

$$\lim_{z\to z_0} g(z) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^m = c_m \neq 0,$$

pa je $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = +\infty$.

Obrnuto, ako je $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = +\infty$, tada postoji $r > 0$, takvo da je $f(z) \neq 0$ za $0 < |z-z_0| < r$. Posmatrajmo funkciju

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & 0 < |z-z_0| < r \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

Pošto je $\lim_{z\to z_0} f_1(z) = 0$, to je funkcija f_1 analitička u krugu $K(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}$, pri čemu je z_0 jedinstvena nula funkicje f_1 u tom krugu. Zbog toga postoji prirodan broj m, takav da je $f_1(z) = (z-z_0)^m g(z)$, gdje je funkcija g analitička u krugu $K(z_0, r)$, $g(z_0) \neq 0$. Slijedi da je i funkcija $g_1(z) = \frac{1}{g(z)}$ analitička u $K(z_0, r)$, pa je

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-z_0)^{-m}\frac{1}{g(z)} \\ &= (z-z_0)^m \sum_{i=0}^{\infty} b_i(z-z_0)^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i(z-z_0)^{i-m} \\ &= \sum_{j=-m}^{\infty} c_j(z-z_0)^j,\ 0 < |z-z_0| < r,\ c_{-m} = b_0 = g(z_0) \neq 0. \end{aligned}$$

što znači da je z_0 pol reda m funkcije f. □

Teorema 5.8. *Ako je z_0 izolovani singularitet funkcije f, tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

(a) Tačka z_0 je pol reda m.

(b) Za svako $k < m$ tačka z_0 je pol funkcije $h_k(z) = (z - z_0)^k f(z)$ i otklonjiv singularitet funkcije $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$.

(c) $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z) = \beta$, gdje je $\beta \neq 0$ i $\beta \neq \infty$.

(d) Tačka z_0 je nula višestrukosti m funkcije

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \in \{z : 0 < |z - z_0| < r\} \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

Dokaz. Neka je ispunjen uslova (a). Tada je

$$f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_1(z-z_0)^{-1}+c_0+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots, c_{-m} \neq 0,$$

$z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\} = \{z \in C : 0 < |z - z_0| < r\}$. Tada je za $k \leq m$

$$\begin{aligned} h_k(z) &= (z - z_0)^k f(z) \\ &= c_{-m}(z - z_0)^{-m+k} + \cdots + c_0(z - z_0)^k + \cdots + c_n(z - z_0)^{n+k} + \cdots, \\ &\quad z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}, \end{aligned}$$

odakle slijedi da je za tačka z_0 pol reda $m-k$ funkcije h_k, dok je za $k = m$ tačka z_0 otklonjiv singularitet funkcije $g(z) = h_m(z) = (z - z_0)^m f(z)$. Dakle, $(a) \Longrightarrow (b)$.

Pretpostavimo da je ispunjen uslov (b). Tada je z_0 pol funkcije $h_{m-1}(z) = (z - z_0)^{m-1} f(z)$, pa postoji $r > 0$, takvo da je za $0 < |z - z_0| < r$,

$$h_{m-1}(z) = b_{-l}(z-z_0)^{-l}+\cdots+b_0+b_1(z-z_0)+\cdots+b_n(z-z_0)^n+\cdots,$$

gdje je $b_{-l} \neq 0$. Pošto je z_0 otklonjiv singularitet funkcije

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z) = (z - z_0)h_{m-1}(z),$$

imamo da je

$$g(z) = b_{-l}(z-z_0)^{-l+1}+\cdots+b_{-1}+b_0(z-z_0)+\cdots+b_n(z-z_0)^{n+1}+\cdots.$$

Laurentov red funkcije g sastoji se samo od pravilnog dijela, pa iz uslova $b_{-l} \neq 0$ slijedi da je $l = 1$, $b_{-1} \neq 0$ i

$$g(z) = \sum_{j=-1}^{\infty} b_j (z - z_0)^{j+1}.$$

Odavde dalje slijedi

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots + c_0 + \cdots + c_n (z - z_0)^n + \cdots ,$$

gdje je $c_{-m} = b_{-1} \neq 0$, pa je z_0 pol reda m funkcije f. Dakle, $(b) \Longrightarrow (a)$, odnosno $(a) \Longleftrightarrow (b)$.

Ponovo pretpostavimo da je ispunjen uslov (a), odnosno da je z_0 pol reda m funkcije f. Tada postoji $r > 0$, takvo da je

$$f(z) = c_{-m}(z - z_0)^{-m} + \cdots + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots , \ 0 < |z - z_0| < r,$$

gdje je $c_{-m} \neq 0$. Odavde slijedi da je

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = \beta,$$

gdje je $\beta = c_{-m} \neq 0$ i $\beta \neq \infty$. To znači da $(a) \Longrightarrow (c)$.

Obrnuto, ako postoji $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = \beta \neq 0$, tada je z_0 otklonjiv singularitet funkcije $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$, pa postoji realan broj $r > 0$, takav da je

$$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (z - z_0)^i, \ b_0 \neq 0, \ 0 < |z - z_0| < r.$$

Odavde slijedi da je

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z) = \sum_{i=-m}^{\infty} c_i (z - z_0)^i, \ 0 < |z - z_0| < r,$$

gdje je $c_{-m} = b_0 \neq 0$, što znači da je z_0 pol reda m funkcije f. Uzimajući u obzir prethodna razmatranja, zaključujemo da je $(a) \Longleftrightarrow (c)$.

Dokažimo još da $(c) \Longrightarrow (d)$. Pretpostavimo da je izpunjen uslov (c) i posmatrajmo funkciju $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$, koja je, za neko $r > 0$, analitička u prstenu $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$. Postavimo $g(z_0) := \lim_{z \to z_0} g(z)$.

Tada je, prema uslovu (c), $g(z_0) \neq 0$. Odavde, zbog neprekidnosti funkcije g u krugu $\{z : |z - z_0| < r\}$, slijedi da postoji $r_1 > 0$, takvo da je $g(z) \neq 0$ za $|z - z_0| < r_1$. Funkcija $f_1(z) = \frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m h(z)$, gdje je $h(z) = \frac{1}{g(z)}$ analitička i različita od nule u krugu $|z - z_0| < r_1$. To znači da je z_0 nula reda m funkcije f_1, odnosno da $(c) \implies (d)$.

Pretpostavimo da je izolovani singularitet z_0 funkcije f nula reda m funkcije f_1. Tada je $f_1(z) = (z-z_0)^m h(z)$, pri čemu je $h(z_0) \neq 0$. Funkcija $h(z) = f_1(z)(z - z_0)^{-m}$ je analitička (pa dakle i neprekidna) u nekom krugu $\{z : |z - z_0| < r_1\}$, a odatle slijedi da je $h(z) \neq 0$ u nekom krugu $\{z : |z - z_0| < r\}$. Odavde sijedi da je i funkcija $g(z) = \frac{1}{h(z)}$ analitička u krugu $\{z : |z - z_0| < r\}$ i da je pri tome $g(z_0) \neq 0$. Tada je

$$g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (z - z_0)^i, \ b_0 \neq 0,$$

i

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z) = \sum_{i=-m}^{\infty} c_i (z - z_0)^i, \text{ pri čemu je } c_{-m} = b_0 \neq 0.$$

To znači da je z_0 pol reda m funkcije f. Dokazali smo, dakle, da $(d) \implies (a)$.

Uzimajući u obzir i ranije dokaze, imamo da je $(a) \iff (b)$, $(a) \iff (c)$, $(c) \implies (d) \implies (a)$, čime je teorema dokazana u potpunosti. □

Ostaje da primijetimo da se izolovani singularitet z_0 funkcije f prepoznaje kao esencijalni singularitet tako što se negiraju dvije preostale mogućnosti: da je to otklonjiv singularitet i da je pol. To znači da je izolovani singularitet z_0 funkcije $f(z)$ esencijalni singularitet te funkcije ako i samo ako (u $\overline{\mathbb{C}}$) ne postoji $\lim_{z \to z_0} f(z)$. Odavde slijedi sljedeće tvrdjenje:

Teorema 5.9. *Ako je z_0 izolovani singularitet funkcije f i ako je $f(z) \neq 0$ u nekoj okolini tačke z_0, tada je z_0 esencijalni singularitet te funkcije ako i samo ako je z_0 esencijalni singularitet funkcije $\frac{1}{f}$.*

Primjer 5.10. Neka je $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Ako je $z_n = \frac{1}{n}$, tada $z_n \to 0$ i $f(z_n) = e^n \to +\infty$ kada $n \to \infty$. S druge strane, ako je $z_n = -\frac{1}{n}$, tada $z_n \to 0$ i $f(z_n) \to 0$ kada $n \to \infty$. Ako je $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$, tada postoji $a \in \mathbb{C}$, takvo da je $e^a = w$. Ako je $z_n = \frac{1}{a+2\pi n i}$, tada $z_n \to 0$ kada $n \to \infty$ i $f(z_n) = w$. Dakle, tačka $z_0 = 0$ je esencijalni singularitet funkcije $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Pri tome, za svako $w \in \overline{\mathbb{C}}$ postoji niz (z_n), takav da $z_n \to 0$ a $f(z_n) \to w$ kada $n \to \infty$.

Teorema 5.11 (Casorati-Weirestrassova). *Izolovani singularitet z_0 funkcije f je esencijalni singularitet te funkcije ako i samo ako za svako $w \in \overline{\mathbb{C}}$ postoji niz (z_n) koji konvergira ka z_0, takav da $f(z_n) \to w$ kada $n \to \infty$.*

Dokaz. Jedan dio tvrdjenja je direktna posljedica teorema o otklonjivom singularitetu i polu funkcije: ako za svako $w \in \overline{\mathbb{C}}$ postoji niz (z_n), takav da $z_n \to z_0$ i $f(z_n) \to w$ kada $n \to \infty$, onda je z_0 esencijalni singularitet funkcije f.

Pretpostavimo da je z_0 esencijalni singularitet funkcije f. Tada je

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

$$z \in K = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\},$$

pri čemu je beskonačno mnogo koeficijenata c_n sa negativnim indeksom n različiti od nule. U toku dokaza teoreme o Laurentovom redu dokazano je da tada red $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n (= f_1(z))$ konvergira za svako $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$. Slijedi da je funkcija $g(\eta) = c_{-1}\eta + c_{-2}\eta^2 + \cdots + c_{-n}\eta^n + \cdots$ analitička u cijeloj kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$. Pošto ta funkcija nije konstantna, ona je, prema Liouvillovoj teoremi, neograničena. Slijedi da postoji niz (η_n), $\eta_n \to \infty$, takav da $g(\eta_n) \to \infty$. Tada niz $z_n = z_0 + \frac{1}{\eta_n} \to z_0$, a $f_1(z_n) \to \infty$, $f_2(z_n) \to 0$, pa $f(z_n) \to \infty$ kada $n \to \infty$.

Pretpostavimo sada da je $w \in \mathbb{C}$. Ako je z_0 tačka nagomilavanja skupa $A = \mathrm{Null}\ (h)$ nula funkcije $h(z) = f(z) - w$, onda postoji niz (z_n) tačaka skupa A, takav da $z_n \to z_0$, a tada $f(z_n) \to w$. Ako z_0 nije tačka nagomilavanja skupa A, onda postoji krug $K(z_0, \varepsilon)$ koji ne sadrži ni jednu nulu funkcije h. Tada je funkcija $\varphi = \frac{1}{h}$ analitička u skupu $K(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. Tačka z_0 je esencijalni singularitet i funkcije h i funkcije φ. Pri tome postoji niz (z_n) takav da $z_n \to z_0$ i $\varphi(z_n) \to \infty$ kada $n \to \infty$. Tada $h(z_n) \to w$, odnosno, $f(z_n) \to w$ kada $n \to \infty$.

$\square$

Iz Casorati-Weirestrassove teoreme slijedi da ako se posmatraju svi nizovi (z_n) koji konvergiraju ka esencijalnom singularitetu z_0 funkcije f, onda je skup svih tačaka nagomilavanja odgovarajućih nizova $(f(z_n))$ proširena kompleksna ravan. To je bitno drugačija situacija od situacija kada je z_0 pol (tada je skup svih tačaka nagomilavanja nizova $(f(z_n))$ tačka ∞), ili kada je z_0 otklonjiv singularitet (tada je skup svih tačaka nagomilavanja nizova $(f(z_n))$ neka tačka iz $\mathbb{C}$). Dakle, ponašanje funkcije f u okolini izolovanog singulariteta zavisi od glavnog dijela Laurentovog reda u okolini tog singulariteta

Bez dokaza dajemo sljedeću teoremu, opštiju od Casorati-Weirestrassove teoreme.

Teorema 5.12 (Picardova teorema)**.** *Ako je tačka $z_0 \in D$ esencijalni singularitet funkcije $f : D \to \mathbb{C}$, onda za svaku okolinu $O(z_0) \subseteq D$ tačke z_0 i svako $w \in \overline{\mathbb{C}}$, sa izuzetkom najviše jedne vrijednosti, postoji beskonačno mnogo tačaka $z \in O(z_0)$, takvih da je $f(z) = w$.*

Primjer 5.13. Dokažimo da je tvrdjenje Picardove teoreme tačno za funkciju $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Za $w \neq 0$ i $r > 0$ jednačina $e^{1/\eta} = w$, $|\eta| < r$, je ekvivalentna sa jednačinom $e^z = w$, za $|z| > 1/r$. Neka je $z = x + iy$ i $w = u + iv$. Tada je $|w| = e^x$ i $e^{iv} = e^{iy}$. Slijedi da su rješenja polazne jednačine $z = \log |w| + i(v + 2k\pi)$, $k \in Z$.

Razmotrimo posebno slučaj kada je izolovani singularitet funkcije f tačka $z_0 = \infty$. Tada postoji $r > 0$, takvo da je na skupu $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ funkcija f analitička. Slijedi da je funkcija $\varphi(\eta) = f(1/\eta)$ analitička na skupu $\{\eta : 0 < |\eta| < \frac{1}{r}\}$, pa je $\eta = 0$ izolovani singularitet funkcije φ. To znači da u okolini tačke 0 funkciju φ možemo razložiti u Laurentov red

$$\varphi(\eta) = f\left(\frac{1}{\eta}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \eta^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \eta^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \eta^k,$$

odakle slijedi da je

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}.$$

Kažemo da je gornjom formulom dato razlaganje funkcije f u Laurentov red u okolini tačke ∞. Pri tome se red $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^k$ naziva glavnim dijelom a red $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$ pravilnim dijelom ovog Laurentovog reda. Klasifikacija izolovanog singulariteta $z_0 = \infty$ funkcije f vrši se na uobičajen način: ako glavni dio Laurentovog reda funkcije f u okolini beskonačno udaljene tačke sadrži beskonačno mnogo članova, onda je $z_0 = \infty$ esencijalni singularitet funkcije f; ako je $c_{-m} \neq 0$ i $c_{-k} = 0$ za svako $k > m$, onda je $z_0 = \infty$ pol reda m funkcije f; ako Laurentov red sadrži samo pravilni dio onda je $z_0 = \infty$ otklonjivi singularitet funkcije f. Ukupno, beskonačno udaljena tačka je esencijani (pol reda m, otklonjiv singularitert) izolovani singularitet funkcije f ako i samo ako je tačka $\eta = 0$ esencijalni singularitet (pol reda m, otklonjiv singularitet) funkcije $\varphi(\eta) = f(1/\eta)$.

Primjer 5.14. (a) Beskonačno udaljena tačka je izolovani singularitet funkcije $f(z) = z^{-1} \sin z$. Da bismo utvrdili prirodu tog singulariteta dovoljno je posmatrati funkciju $\varphi(\eta) = f(1/\eta) = \eta \sin 1/\eta$, koja u tački $\eta_0 = 0$ ima otklonjiv singularitet. Dakle, $z_0 = \infty$ je otklonjiv singularitet funkcije $f(z) = z^{-1} \sin z$.

(b) Ako je $f(z) = e^z$, tada je $\varphi(\eta) = f(1/\eta) = e^{1/\eta}$, i pošto je $\eta_0 = 0$ esencijalni singularitet funkcije φ, to je $z_0 = \infty$ esencijalni singularitet funkcije f.

(c) Beskonačno udaljena tačka je pol reda dva funkcije $f(z) = (z - 1)^3/z$.

Definicija 5.15. *Ako je Ω oblast u $\mathbb{C}$ ili u $\overline{\mathbb{C}}$ a funkcija f analitička u $\Omega \setminus E$, gdje je $E \subseteq \Omega$ skup polova funkcije f, tada se kaže da je f meromorfna na Ω.*

Za funkciju koja je meromorfna na $\mathbb{C}$ kratko kažemo da je meromorfna.

Primjer 5.16. (a) Funkcija $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, gdje su P_n i Q_m polinomi stepena n odnosno m, je meromorfna. Njeni polovi su su nule polinoma Q_m. Funkcija f nema drugih izolovanih singulariteta.

(b) Jedini izolovani singulariteti funkcije

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

su $z_k = 2k\pi i, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ i to su polovi, pa je f meromorfna funkcija

Primjedba 5.17. Primijetimo da ako je f meromorfna funkcija, tada je skup E njenih polova najvše prebrojiv. Ako je f meromorfna na $\overline{\mathbb{C}}$, tada je skup njenih polova konačan. U protivnom, ako bi skup E bio beskonačan, tada bi u $\mathbb{C}$, postojala tačka nagomilavanja skupa E. To bi bila singularna tačka funkcije f, ali ne bi bila izolovani singularitet.

Teorema 5.18. *Ako je f meromorfna funkcija, takva da je beskonačn udaljena tačka njen otklonjiv singularitet ili pol, tada je f racionalna funkcija.*

Dokaz. Neka su $z_1, z_2, \ldots, z_k$ polovi reda $m_1, m_2, \ldots, m_k$, a $z_0 = \infty$ pol reda $l \geq 0$ funkcije f. Posmatrajmo proizvod

$$g(z) = z^{-l} f(z) \prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{m_j}.$$

Slijedi (v. teoremu 3.5.6) da za svako $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, postoji $\lim_{z \to z_j} g(z)$. Istovremeno, postoji $\lim_{z \to \infty} g(z)$. Dakle, svi singulariteti funkcije g su otklonjivi, pa je $g(z)$ konstanta. Odavde dalje slijedi da je

$$f(z) = \frac{g(z) z^l}{\prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{m_j}}$$

što je i trebalo dokazati. □

Zadaci

1. Razviti u Laurentov red funkcije po stepenima $z - a$ u oblastia D ako je

   a) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)},\ a = 0, D = \{z \in C : 1 < |z| < 2\}$,

   b) $f(z) = \frac{z^3}{(z-2)(z+1)},\ a = -1, D = \{z \in C : 0 < |z + 1| < 3\}$.

2. Ispitati karekter singulariteta funkcije f ako je

   a) $f(z) = \dfrac{z}{e^z + 1}$,

   b) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^2}$,

   c) $f(z) = \sin \frac{z}{z+1}$,

   U sljedećim zadacima date funkcije razložiti u Laurentov red na datim prstenima ili u (šupljim) okolinama datih tačaka. Ako se traži razvoj funkcije f u okolini tačke $z = a$ onda treba naći razvoj po stepenima $z - a$. Ako se pak traži razvoj funkcije f u tački $z = \infty$ onda se podrazumijeva da treba naći razvoj po stepenima z ili, što je isto, po stepenima $1/z$.

3. $w = \dfrac{1}{z-2}$; (i) $z = 0$, (ii) $z = \infty$.

4. $w = \dfrac{1}{(z-a)^k}$ ($a \neq 0$, k prirodan broj); (i) $z = 0$, (ii) $z = \infty$.

5. $w = \dfrac{1}{z-a}$; $z = b, b \neq a$.

6. $w = \dfrac{1}{z(1-z)}$; (i) $z = 0$, (ii) $z = 1$, (iii) $z = \infty$.

7. $w = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(0 < |a| < |b|)$;
   (i) $z = 0$, (ii) $z = a$, (iii) $z = \infty$, (iv) $|a| < |z| < |b|$.

8. $w = \dfrac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)}$; (i) $z = \infty$, (ii) $1 < |z| < 2$.

9. $w = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$; (i) $z = i$, (ii) $z = \infty$.

10. $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}\, w(+\infty) = +\infty)$; $z = \infty$.

11. $w = \dfrac{z}{1-z^8} + z^2 e^{\frac{1}{z}}$; (i) $z = 0$, (ii) $z = \infty$.

12. $w = e^{\frac{1}{z-i}} \dfrac{\sin \frac{1}{z-i}}{(z-i)^2}$; $z = i$.

13. $w = e^{\frac{1}{1-z}}$; (i) $z = 1$, (ii) $z = \infty$.

14. $w = e^{z + \frac{1}{z}} + \sin z \sin \dfrac{1}{z}$; $0 < |z| < \infty$.

15. $w = \sin \dfrac{z}{1-z}$; (i) $z = 1$, (ii) $z = \infty$
    (u poslednjem slučaju ograničiti se na prva tri člana reda).

16. $w = \operatorname{ctg} z$; $z = 0$.

17. Dokazati da ako cijela funkcija u beskonačno udaljenoj tački ima pol reda m, tada je f polinom stepena m.

18. Konstruisati funkciju f koja je analitička na $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$, pri čemu su $0, 1$ i ∞ esencijalni izolovani singulariteti.

19. Neka je $f(z) = e^{z-1/z}$, $0 < |z| < \infty$.

    (a) Odrediti koeficijente c_n u razvoju funkcije f u Laurentov red u prstenu $\{z : 0 < |z| < \infty$.

    (b) Dokazati jednakost

    $$\int_{|z|=1} \frac{f(\eta)}{\eta^{n+1}} d\eta = i \int_0^{2\pi} \cos(nt - 2\sin t) dt.$$

    (c) Izvesti formulu

    $$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt - 2\sin t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}.$$

20. Neka je $z_0 \in \mathbb{C}$ pol reda m funkcije f i pol reda n funkcije g. Šta se može o o tački z_0 ka izolovanom singularitetu funkcija $F = f + g$?

21. Neka je f cijela funkcija za koju postoji $M > 0$, takvo da je $|f(z)| \leq M|\sin z|$, za svako $z \in \mathbb{C}$. Dokazati da postoji $K \in \mathbb{C}$, takvo da je $f(z) = K \sin z$.

6 Rezidum. Primjena na izračunavanje integrala kompleksnih funkcija

Definicija 6.1. *Rezidum u tački $z_0 \in D \subseteq \mathbb{C}$ funkcije $f : D \mapsto \mathbb{C}$, analitičke na skupu $D \setminus \{z_0\}$, je kompleksan broj koji se označava sa* $\mathrm{Res}(f; z_0)$ *i definiše formulom*

$$\mathrm{Res}(f; z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} f(z)\, ddz,$$

gdje je γ dio po dio glatka zatvorena kriva orijentisana suprotno kretanju kazaljke na satu, koja ograničava oblast $\Omega \subseteq D$, pri čemu $z_0 \in \Omega$.

Iz definicije reziduma i Cauchyeve teoreme slijedi da ako je funkcija f analitička u tački z_0, onda je $\mathrm{Res}(f;z_0)=0$. Ako je z_0 izolovani singularitet funkcije f, tada se u nekom prstenu $\{z\in\mathbb{C}:0<|z-z_0|<r\}$ funkcija f može razložiti u Laurentov red i $\mathrm{Res}(f,z_0)=c_{-1}$, gdje je c_{-1} koeficijenat uz $(z-z_0)^{-1}$. Odavde slijedi da ako je z_0 otklonjiv singularitet funkcije f, onda je $\mathrm{Res}(f;z_0)=0$.

Ako je z_0 pol reda m funkcije f, onda je

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+\cdots,0<|z-z_0|<r.$$

Funkcija

$$g(z)=(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+\cdots,$$

je analitička u krugu $\{z:|z-z_0|<r\}$. Diferencirajući gornji red $(m-1)$ puta dobijamo

$$g^{(m-1)}(z)=(m-1)!c_{-1}+(z-z_0)g_1z),g_1(z_0)\neq 0.$$

Odavde slijedi da je

$$\mathrm{Res}(f;z_0)=c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

Specijalno, ako je z_0 prost pol, onda je

$$\mathrm{Res}(f;z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Ako je $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, gdje su funkcije φ i ψ analitičke u $z_0,\varphi(z_0)\neq 0,\psi(z_0)=0,\psi'(z_0)\neq 0$, onda je z_0 pol prvog reda funkcije f, pa je

$$\mathrm{Res}(f;z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Pretpostavimo da je funkcija f analitička u skupu $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$, gdje je $r > 0$. Rezidum funkcije f u tački $z_0 = \infty$ definiše se formulom

$$\operatorname{Res}(f;\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz,$$

gdje je $\gamma = \{z : |z| = \rho\}$, kružnica polupréčnika $\rho > r$. Ako se funkcija f razloži u Laurentov red u okolini tačke $z_0 = \infty$, onda je njen rezidum u tački z_0 jednak koeficijentu uz $\frac{1}{z}$, sa promijenjenim znakom. Primijetimo da se taj koeficijent nalazi u pravilnom dijelu Laurentovog reda.

Iz definicije reziduma funkcije u datoj tački slijedi da, pod izvesnim uslovima, važi jednakost

$$2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f;z_0) = \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Odavde slijedi da se integrali kompleksnih funkcija po zatvorenim krivim linijama mogu računati pomoću reziduma. U vezi sa ovom primjedbom važi sljedeće tvrdjenje.

Teorema 6.2 (Cauchyeva teorema o rezidumima). *Neka je D oblast u BbbC i $A = \{z_1, \ldots, z_n\} \subseteq D$. Ako je funkcija f analitička na skupu $D \setminus A$, onda za svaku konturu $\gamma \subseteq D$ koja ograničava oblast $\Omega \supseteq A, \Omega \subseteq D$, važi*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f;z_k).$$

Dokaz. Neka su γ_1,. . .,γ_n($\subseteq \Omega$) konture opisane oko tačaka z_1,. . . , z_n, takve da njima ograničene zatvorene oblasti $\Omega_1 \subseteq \Omega, \ldots, \Omega_n \subseteq \Omega$ nemaju zajedničkih tačaka. Primjenjujući Cauchyevu teoremu za višestruko povezane oblasti, dobijamo

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \operatorname{Res}(f;z_k) = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f;z_k).$$

□

Primjedba 6.3. Pretpostavimo da su $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ konture u C koje ograničavaju oblasti $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$, pri čemu je za $i \neq j$ presjek $\overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j}$ prazan skup. Neka je dalje γ_0 kontura koja obuhvata konture $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ i ograničava oblast Ω_0. Sa D označimo višestruko povezanu oblast $\Omega_0 \setminus (\Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_n)$ a sa ∂D njenu granicu, koja se sastoji od kontura $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, orijentisanu tako da kada se ona (granica ∂D) obilazi, oblast D ostaje sa lijeve strane. Ako je $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \subseteq D$ konačan skup izolovanih singulariteta funkcije f, pri čemu $z_i \in \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, i ako je funkcija f analitička na $D \setminus A$ i neprekidna na $\overline{D} \setminus A$, tada, ponovo primjenjujući Cauchyevu teoremu, dobijamo da je

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_k \in A} \operatorname{Res}(f; z_k).$$

Ako skup izolovanih singulariteta funkcije f sadrži i beskonačno udaljenu tačku, onda važi sljedeće tvrdjenje.

Teorema 6.4. *Ako je funkcija f analitička na skupu $\mathbb{C} \setminus A$, gdje je $A = \{z_1, \ldots, z_n\}$ konačan skup, onda je*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k) + \operatorname{Res}(f; \infty) = 0.$$

Dokaz. Neka je γ krug koji obuhvata tačke $z_1, \ldots, z_n$, orijentisan suprotno kretanjui kazaljke na satu. Tada je, prema prethodnoj teoremi,

$$\int_{\gamma^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k).$$

S druge strane, na osnovu definicije reziduma funkcije f u tački ∞, važi jednakost

$$2\pi i \operatorname{Res}(f; \infty) = -\int_{\gamma^+} f(z)\, dz.$$

Iz ovih formula slijedi tvrdjenje teoreme. □

U sljedećem primjeru pokazuje se kako se integrali po konturama mogu računati pomoću reziduma.

Primjer 6.5. Izračunaćemo $\int_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^m}\,dz$, gdje je γ: (a) polukrug $\{z : |z| = r, -r \leq \mathrm{Re}\, z \leq r, \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$, (b) krug $\{z : |z| = r\}$, $(r > 0, r \neq 1)$, orijentisan suprotno kretanju kazaljke na satu.

Izolovani singulariteti funkcije $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^m}$ su tačke $z_1 = i$ i $z_2 = -i$ i to su polovi reda m. Ako je $r < 1$, onda je i u slučaju (a) i u slučaju (b) funkcija f analitička u oblasti ograničenoj krivom γ, pa je u oba slučaja $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Ako je $r > 1$, onda je u slučaju (a) potrebno izračunati reziduum funkcije f u tački $z_1 = i$ a u slučaju (b) reziduum iste funkcije u tačkama $z_1 = i$ i $z_2 = -i$. Imamo da je

$$\mathrm{Res}(f;i) = \lim_{z\to i}((z-i)^m \frac{1}{(1+z^2)^m})^{(m-1)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(i+z)^m})^{(m-1)}$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{(-1)^{m-1} m(m+1)\cdots(2m-2)}{(i+z)^{2m-1}} = -i\frac{(2m-2)!}{2^{2m-1}((m-1)!)^2}.$$

Slijedi da je u slučaju (a)

$$\int_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^m} = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f;i) = 2\pi \frac{(2m-2)!}{2^{2m-1}((m-1)!)^2}.$$

Zadaci

(a) Izračunati

a) $\mathrm{Res}(ze^{\frac{1}{z-1}};1)$; b) $\mathrm{Res}(\frac{1}{\sin^2 \pi z};-1)$;

c) $\mathrm{Res}(\frac{1-\cos z}{z^n};0)$ $(n \in \mathbb{N})$; d) $\mathrm{Res}\left(\frac{e^{\frac{1}{z}} z^n}{2z};\infty\right)$

e) $\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{(z+1)(z^2+4)};-2i\right)$; f) $\mathrm{Res}\left(\frac{e^{\pi i z}}{(z(2z-1))^3};1/2\right)$;

g) $\mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{\sin^2 z};-\pi\right)$.

(b) Neka je funkcija f regularna u beskonačno udaljenoj tački. Dokazati da je $\mathrm{Res}\, f(z);\infty) = \lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z)) = -\varphi'(0)$, gdje je $\varphi(z) = f(1/z)$.

(c) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{z^5(z^{20}-3)}$, $D = \{z \in C : |z| < 3\}$;

(d) $\displaystyle\int_{\partial D} z\cos\frac{z}{z+1}dz$, $D = \{z \in C : |z| > 2\}$;

(e) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z}{z-1} e^{-z^2} dz,\ D = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{4}\}.$

(f) $\displaystyle\int_l \frac{1}{z} e^{\frac{1}{1-z}} dz$, gdje je l zatvorena dio po dio glatka kriva.

22. Odrediti rezidiume sljedećih funkcija u svim izolovanim singularitetima i u tački $z = \infty$ i provjeriti da li su te funkcije meromorfne funkcije u cijeloj kompleksnoj ravni ili pak u proširenoj kompleksnoj ravni:

1. $w = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$. 2. $w = \dfrac{z^{2n}}{(1+z)^2}$ $(n \in \mathbb{N})$. 3. $w = \dfrac{1}{z(1-z^2)}$.

4. $w = \dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$. 5. $w = \dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$. 6. $w = \dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$.

7. $w = \dfrac{1}{\sin z}$. 8. $w = \operatorname{ctg}^3 z$. 9. $w = z^3 \cos \dfrac{1}{z-2}$.

10. $w = e^{z+\frac{1}{z}}$. 11. $w = \sin z \sin \dfrac{1}{z}$. 12. $w = \cos \dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$.

13. $w = \dfrac{1}{z(1-e^{-hz})}$ $(h \neq 0)$. 14. $w = \dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$.

15. $w = \dfrac{\tan z}{z^n}$ (n-prirodni broj). 16. $w = \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t$.

23. Odrediti rezidium funkcije
$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{2-z} - 1}$$
u tački $z = 1$ ($\sqrt{1} = 1$).

24. Funkcije $w = f(z)$ u tački $z = 0$ ima razvoj $w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$. Odrediti reziduum funkcije $g(z) = [f(z)]^2$ u tački $z_0 = 0$.

25. Neka su funkcije f i g analitičke u krugu $K(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ i neka je a nula funkcije f višestrukosti m i nula funkcije g višestrukosti $m+1$. Dokazati jednakost
$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}; a\right) = (m+1)\frac{f^m(a)}{g^{m+1}(a)}.$$

26. Neka je funkcija f analitička u prosto povezanoj oblasti $D \supseteq \gamma(a,r)$, gdje je $\gamma(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$, pri čemu je $f(z) \neq 0$ na γ. Izračunati
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(a,r)} \frac{f'(z)dz}{f(z)z^m}.$$

7 Primjena reziduuma za izračunavanje integrala

U ovom dijelu pokazaćemo se kako se Cauchyeve teoreme o reziduumima mogu koristiti za izračunavanje odredjenih integrala realnih funkcija.

1. Posmatraćemo integrale tipa
$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi,$$
gdje je R racionalna funkcija. Gornji integral se može računati uvodeći novu promjenljivu $z = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Tada je $\cos\varphi = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \sin\varphi = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), dz = izd\varphi$. Slijedi da je
$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}dz \\ &= \int_{|z|=1} R_1(z)dz = 2\pi i\sum_k \text{Res}(R_1; z_k), \end{aligned}$$
pri čemu se sabiraju rezidumi funkcije R_1 u izolovanim singularitetima te funkcije, koji se nalaza u krugu $|z| < 1$. Primijetimo da je funkcija R_1 racionalna, pa su njeni izolovani singulariteti ili otklonjivi ili polovi. To znači da se za izračunavanje reziduma mogu primijeniti ranije opisani postupci.

Primjer 7.1. Izračunaćemo integral $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$, gdje je $a > b > 0$. Iz $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ postavljajući $z = e^{i\varphi}$, dobijamo: $\cos\varphi = \dfrac{1+z^2}{2z}$ i

$\mathrm{d}\varphi = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz}$. Zato je

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2} = \frac{4}{ib^2}\int_{|z|=1} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(1+2a/bz+z^2)^2} = \frac{4}{ib^2}\int_{|z|=1} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2},$$

gdje je $z_1 = -\frac{a}{b} + \sqrt{(\frac{a}{b})^2 - 1}$ i $z_2 = -\frac{a}{b} - \sqrt{(\frac{a}{b})^2 - 1}$. Lako se pokazuje da je $|z_1| < 1$ i $|z_2| > 1$, pa je

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2} = 2\pi i\frac{4}{ib^2}\operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2} = \frac{8\pi}{b^2}\left(\frac{z}{(z-z_2)^2}\right)'_{z=z_1} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}.$$

Vratimo se opštijim pitanjima. Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna na $\mathrm{Im}\ z \geq 0$ i analitička na skupu $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > 0\} \setminus A$, gdje je $A = \{z_1, \ldots, z_k\}$ skup izolovanih singulariteta funkcije f koji leže u gornjoj poluravni $\mathrm{Im}\ z > 0$. Pretpostavimo dalje da postoje $M > 0$, $r > 0$ i $\delta > 0$, takvi da za $|z| > r$, važi: $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}$. Pokažimo kako se tada može izračunati integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Ako polukrug $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \mathrm{Im}\ z \geq 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z = 0, |\mathrm{Re}\ z| \leq r\}$ obuhvata sve tačke $z_1, z_2, \ldots, z_k$ i ako je $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \mathrm{Im}\ z \geq 0\}$, onda je

$$\int_{K_r} f(z)\,dz = \int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(f; z_i).$$

Pri tome je

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\,dz\right| \leq \int_{\gamma_r} |f(z)|ds \leq \int_{\gamma_r} \frac{M}{|z|^{1+\delta}}ds = \frac{2\pi M}{r^\delta}.$$

Slijedi da

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz \to 0 \text{ kada } r \to \infty.$$

Zbog toga je

$$\lim_{r\to 0}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(f;z_i),$$

odnosno,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(f;z_i).$$

Primjer 7.2. Da bismo izračunali integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = 2I_1.$$

posmatraćemo funkciju $f(z) = \frac{1}{1+z^{2n}}$, čiji su jedini izolovani singulariteti prosti polovi (rješenja jednačine $z^{2n} = -1$): $z_k = e^{(2k+1)\pi i/(2n)}, k = 0,1,\ldots,2n-1$. Kontura Γ_R koja se sastoji od tri dijela: $\gamma_{1R} = \{z : \mathrm{Im}\ z = 0, 0 \le \mathrm{Re}\ z \le R\} = \{z = t : 0 \le t \le R\}$, $\gamma_{2R} = \{z : |z| = R, 0 \le arg\, z \le \pi/n\} = \{z = Re^{it} : 0 \le t \le \pi/n\}$, $\gamma_{3R} = \{z = te^{\pi i/n} : 0 \le t \le R\}$, orijentisana tako da se kružni isječak koji ograničava obilazi u smjeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, za dovoljno veliko R, $(R > 1)$, obuhvata tačno jedan izolovani singularitet: $z_0 = e^{\frac{\pi i}{2n}}$. Odavde slijedi da je, za $R > 1$,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^{2n}}dz &= \int_0^R \frac{1}{x^{2n}}dx + \int_0^{\pi/n} \frac{Rie^{it}dt}{1+R^{2n}e^{2nit}} + \int_R^0 \frac{e^{\pi i/n}dt}{1+t^{2n}}\\ &= 2\pi i \mathrm{Res}(f(z);z_0).\end{aligned}$$

Pri tome je

$$\mathrm{Res}(f(z);z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{1}{1+z^{2n}} = \frac{1}{2nz_0^{2n-1}} = \frac{1}{2n}e^{\frac{-(2n-1)\pi i}{2n}} = -\frac{e^{\frac{\pi i}{2n}}}{2n}.$$

Dalje,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pi/n} \frac{Rie^{it}dt}{1+R^{2n}e^{2nit}}\right| &\le \int_0^{\pi/n} \frac{R}{R^{2n}-1}dt\\ &= \frac{\pi R}{n(R^{2n}-1)} \to 0 \text{ kada } R\to\infty.\end{aligned}$$

Na taj način dobijamo da, kada $R \to \infty$, tada je

$$\begin{aligned} -2\pi i \frac{e^{\pi i/n}}{2n} &= I_1 + 0 - e^{\pi i/n} I_1 = I_1(1 - e^{\pi i/n}) \\ &= I_1 e^{\pi i/(2n)} \left(e^{-\pi i/(2n)} - e^{\pi i/(2n)} \right) = -2i I_1 e^{\pi i/(2n)} \sin \frac{\pi i}{2n}. \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$I = 2I_1 = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{\pi}{n} \, cosec \, \frac{\pi}{2n}.$$

2. Pokazaćemo kako se mogu računati integrali oblika

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\alpha i x} \, dx, \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax \, dx \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax \, dx,$$

gdje je a realan broj veći od nule. Prethodno ćemo dokazati jedan pomoćni rezultat.

Lema 7.3 (Jordanova lema)**.** *Neka je* $D = \{z \in C : \text{Im } z \geq 0\}$ $f : D \to C$ *neprekidna funkcija na* D *i* $A = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ *skup izolovanih singulariteta funkcije* f *koji leže u gornjoj poluravni* $\text{Im } z > 0$. *Neka je dalje funkcija* f *analitička na skupu* $\{z \in C : \text{Im } z > 0\} \setminus A$ *i* $\lim_{z\to\infty, \text{Imz} \geq 0} f(z) = 0$, *pri čemu je konvergencija ravnomjerna u odnosu na* $\arg z$. *Ako je* $\gamma_r = \{z \in C : |z| = r, \text{Im } z \geq 0\}$, *tada*

$$\int_{\gamma_r} f(z) e^{iz} \, dz \to 0 \text{ kada } r \to +\infty.$$

Dokaz. Ako sa M_r označimo maksimum funkcije $|f|$ na skupu γ_r, onda iz uslova teoreme slijedi da $M_r \to 0$ kada $r \to \infty$. Koristeći nejednakost

$\sin\varphi > \frac{2}{\pi}\varphi$, koja važi za $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_r} f(z)e^{iz}\,dz\right| &= \left|\int_0^\pi f(re^{i\varphi})e^{ir\cos\varphi - r\sin\varphi} rie^{i\varphi} d\varphi\right| \\
&\le \int_0^\pi |f(re^{i\varphi})e^{ir\cos\varphi - r\sin\varphi} rie^{i\varphi}| d\varphi \le M_r r \int_0^\pi e^{-r\sin\varphi} d\varphi \\
&= 2M_r r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin\varphi} d\varphi \\
&\le 2M_r r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2r\varphi}{\pi}} d\varphi \\
&= \frac{2M_r r\pi}{2r(1-e^{-r})} \\
&\le M_r\pi \to 0 \text{ kada } r \to \infty.
\end{aligned}$$

□

Ako sada sa K_r označimo gornju polukružnicu γ_r zajedno sa poluprečnikom $[-r, r]$, tada je

$$\int_{K_r} f(z)e^{iaz}\,dz = \int_{-r}^{r} f(x)e^{iax}\,dx + \int_{\gamma_r} f(z)e^{iaz}\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(f; z_i).$$

Ocijenimo integral $\int_{\gamma_r} f(z)e^{iaz}\,dz$. Uvedimo smjenu $az = w$. Neka je $\Gamma_r = \{w \in C : |w| = ar, \mathrm{Im}\ w \ge 0\}$. Primijetimo da funkcija $f_1(w) = f(\frac{w}{a}), a > 0$, zadovoljava sve uslove iz Jordanove leme, pa

$$\int_{\gamma_r} f(z)e^{iaz}\,dz = \frac{1}{a}\int_{\Gamma_r} f(\frac{w}{a})e^{iw}\,dw \to 0 \text{ kada } r \to \infty.$$

Odavde slijedi da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(f(z)e^{iaz}; z_i).$$

Primjer 7.4. Izračunaćemo integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

polazeći od integrala

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx.$$

Pri tome je

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} I_1.$$

Posmatrajmo zatvorenu krivu (v. sliku) $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, gdje su γ_1 i γ_3 duži a γ_2 i γ_4 polukrugovi: $\gamma_1 = \{z \in C : \operatorname{Im} z = 0, -R \leq \operatorname{Re} z < -r\}$, $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, r \leq \operatorname{Re} z \leq R\}, \gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$, pri čemu je $r = 1/R, R > 1$. Neka je kriva Γ orijentisana suprotno kretanju kazaljke na satu.

Tada je

$$0 = \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz.$$

Na osnovu Jordanove leme slijedi

$$\int_{\gamma_4} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \to 0 \text{ kada } R \to \infty.$$

Da bismo ocijenili drugi integral po polukrugu γ_2, primijetimo da za $z \neq 0$ važi

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,\ c_n = \frac{1}{n!} i^n.$$

Funkcija $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ je analitička u $\mathbb{C}$. Slijedi da je

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz + \int_{\gamma_2} h(z)\, dz.$$

Postavljajući $z = re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi$, dobijamo

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\, dz = \int_{\pi}^{0} \frac{1}{re^{i\varphi}} rie^{i\varphi} d\varphi = -i\pi.$$

Funkcija h je ograničena u okolini tačke $z = 0$, pa važi

$$\left| \int_{\gamma_2} h(z) dz \right| \leq \int_{\gamma_2} |h(z)||dz| \leq \text{const} \cdot \pi r \to 0 \text{ kada } r \to 0.$$

Slijedi da

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \to -i\pi \text{ kada } r \to 0.$$

Ukupno važi

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{r}^{R} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \to -i\pi \text{ kada } r \to 0, R \to \infty,$$

odnosno,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = -i\pi.$$

Odavde slijedi da je $2I = \mathrm{Im}\ I_1 = \pi$ i

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Čitaocu ostavljamo da objasni zašto u prethodnom primjeru nije povoljno posmarati kompleksni integral $\int \frac{\sin z}{z} dz$.

Primjer 7.5. Izračunaćemo integral

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

računjem kompleksnog integrala

$$\int_{\Gamma} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} dz,$$

gdje je Γ kontura iz prethodnog primjera: $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, koja se sastoji od duži γ_1 i γ_3 i polukružnica γ_2 i γ_4: $\gamma_1 = \{z \in C : \mathrm{Im}\ z = 0, -R \leq \mathrm{Re}\ z < -r\}$, $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r, \mathrm{Im}\ z \geq 0\}$, $\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z = 0, r \leq \mathrm{Re}\ z \leq R\}$, $\gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \mathrm{Im}\ z \geq 0\}$, pri čemu je $r = 1/R, R > 1$.

Primijetimo da je

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

U oblasti ograničenoj konturom Γ funkcija $f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ nema izolovanih singulariteta, pa je

$$\int_{\Gamma} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} dz = \int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{r}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_4} f(z)dz = 0.$$

Dalje, smjenom $x = -t$ dobijamo

$$\int_{-R}^{-r} f(x)dx = \int_{r}^{R} \frac{1-e^{-2it}}{t^2}dt,$$

odakle slijedi da ako $r \to 0$ tada

$$\int_{-R}^{-r} f(x)dx + \int_{r}^{R} f(x)dx = \int_{r}^{R} \frac{1-e^{-2ix}}{x^2}dx + \int_{r}^{R} \frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx$$

$$= 2\int_{r}^{R} \frac{1-\cos 2x}{t^2}dx = 4\int_{r}^{R} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx \to 4I.$$

Izračunajmo integral $\int_{\gamma_2} f(z)dz$ i $\int_{\gamma_4} f(z)dz$ kada $R \to +\infty$, odnosno kada $r \to 0$. Primijetimo da je

$$f(z) = \frac{1-e^{2iz}}{z^2} = \frac{2i}{z} + g(z),$$

gdje je g analitička funkcija, koja je, dakle, ograničena u okolini tačke $z_0 = 0$. Odavde slijedi da je

$$\left|\int_{\gamma_2} g(z)dz\right| \le \int_{\gamma_2} |g(z)||dz| \le Mr\pi \to 0 \text{ kada}$$

Dalje je

$$-\int_{\gamma_2} \frac{2i}{z}dz = 2i\int_{0}^{\pi} \frac{1}{re^{it}}rie^{it}dt = -2\pi.$$

Slijedi da

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz \to -2\pi \text{ kada } r \to 0.$$

Ocijenimo još i $\int_{\gamma_4} f(z)dz$ kada $R \to +\infty$. Imamo da je tada $z = Re^{it}, t \in [0,\pi]$, pa je

$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)dz\right| = \left|\int_{0}^{\pi} \frac{1-e^{2iRe^{it}}}{R^2e^{2it}}Rie^{it}dt\right| \le \int_{0}^{\pi} \frac{1+e^{-2r\sin t}}{R}dt \le \frac{2}{R} \to 0$$

kada $R \to +\infty$.

Ukupno, imamo
$$4I + 2\pi = 0,$$
odakle slijedi da je
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. Razmotrimo još kako se, korišćenjem komleksnih funkcija, mogu računati integrali oblika $I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)$, gdje je α realan broj (interesantan je jedino slučaj kada α nije cio broj), a $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ racionalna funkcija. Pretpostavlićemo da funkcija Q nema nula na $[0, +\infty)$ i da je $P(0) \neq 0$. Dalje pretpostavljamo da su ispunjeni sljedeći uslovi:
$$\lim_{z\to 0} |z|^\alpha f(z) = \lim_{z\to\infty} |z|^\alpha f(z) = 0.$$
Odavde slijedi da je $\alpha > 0$, a za takve vrijednosti parametra α, posmatrani integral $I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)$ konvergira. Pri tome postoji cijeli broj $k > \alpha$, takav da je $f(z) \sim \frac{A}{z^k}$ gdje je $A \neq 0$. Da bismo koristili prethodne metode za izvodjenje odgovarajućih formula, treba definisati analitičku funkciju koja će se na $[0, +\infty)$ poklopiti sa podintegralnom funkcijom. Osnovna razlika u odnosu na prethodna razmatranja je ta što je funkcija $z^{\alpha-1}$ višeznačna. Izdvojimo jednu njenu analitičku granu na sljedeći način. Sa D označimo kompleksnu ravan sa rezom $[0, +\infty)$. Neka je h analitička grana funkcije $z^{\alpha-1}$ koja je pozitivna na gornjoj granici reza. U oblasti D je $h(z) = r^{\alpha-1} e^{i\varphi(\alpha-1)}, 0 < \varphi < 2\pi$. Na gornjoj granici reza ($\varphi = 0$) je $h(x + i0) = h(x) = x^{\alpha-1} > 0, x > 0$, dok je na donjoj granici ($\varphi = 2\pi$), $h(x - i0) = x^{\alpha-1} e^{i2\pi(\alpha-1)} = h(x) e^{i2\pi\alpha}, x > 0$. Tada je
$$f(x - i0) = e^{i2\pi\alpha} f(x).$$
Neka je $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_3$, gdje su, kao i u prethodnom primjeru, γ_2 i γ_4 polukružnice, a γ_1 i γ_3 duži, Tada je
$$\int_\Gamma z^{\alpha-1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} z^{\alpha-1} f(z)\, dz + \int_{-R}^{-r} z^{\alpha-1} e^{i2\pi\alpha} f(x)\, dx$$
$$+ \int_{\gamma_3} z^{\alpha-1} f(z)\, dz + \int_r^R x^{\alpha-1} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(z^{\alpha-1} f(z); z_k),$$

pri čemu se sabiraju rezidumi u svim singularitetima funkcije $z^{\alpha-1}f(z)$ koji pripadaju skupu $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ocijenimo prvi i treći integral. Neka je

$$M_r = \max\{|z^{\alpha-1}f(z)| : |z| = r\} = r^{\alpha-1}\max\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

Tada

$$r \cdot M_r = r^{\alpha}\max\{|f(z)| : |z| = r\} \to 0 \text{ kada } r \to 0.$$

Odavde slijedi da

$$\left|\int_{\gamma_r} z^{\alpha-1}f(z)dz\right| \leq M_r \cdot 2\pi r \to 0 \text{ kada } r \to 0.$$

Na sličan način dokazuje se da

$$\int_{\gamma_R} z^{\alpha-1}f(z)\,dz \to 0 \text{ kada } R \to \infty.$$

To znači da je

$$2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(z^{\alpha-1}f(z); z_k)$$
$$= \lim_{r\to 0, R\to\infty}\left(\int_{-R}^{-r} x^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}f(x)\,dx + \int_{r}^{R} x^{\alpha-1}f(x)\,dx\right),$$

odnosno

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}f(x)\,dx = \frac{1}{1-e^{i2\pi\alpha}}2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(z^{\alpha-1}f(z); z_k).$$

Primjer 7.6. Izračunaćemo integral

$$\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx.$$

Neka je $f(z) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}$. Funkcija $g(z) = \frac{1}{1+z^3}$ ima proste polove u tačkama $z_0 = -1, z_1 = e^{\pi i/3}, z_2 = e^{5\pi i/3}$. Napravićeo rez $[0, \infty)$ u $\mathbb{C}$, izabrati analitičku granu funkcije $z \mapsto \sqrt{z}$ definisanu sa $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{it/2}, 0 < t < 2\pi$ i integtraliti po konturi $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, gdje su γ_1 i γ_3 kružnice poluprečnika $r > 0$ i $R > r$ a $\gamma_1 = [r, R]$ i $\gamma_3 = [R, r]$ segmenti

Primijetimo da je

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_R^r \frac{-\sqrt{x}}{1+x^3}dx + \int_r^R \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx = 2\int_r^R \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx.$$

Dalje je, za dovoljno malo r,

$$\left|\int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{1+z^3}dz\right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{r}|e^{it/2}|}{|1+r^3e^{3it}|}dt \leq 2\pi\frac{\sqrt{r}}{1-r^3} \to 0 \text{ kada } r \to 0.$$

i slično, za dovoljno veliko R,

$$\left|\int_{\gamma_3} \frac{\sqrt{z}}{1+z^3}dz\right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{R}|e^{it/2}|}{|1+R^3e^{3it}|}dt \leq 2\pi\frac{\sqrt{R}}{R^3-1} \to 0 \text{ kada } R \to +\infty.$$

Integral po konturi Γ orijentisanoj suprotno kretanju kazaljke na satu možemo računati po formuli

$$\int_\Gamma \frac{\sqrt{z}}{1+z^3}dz = 2\pi i \sum_{i=0}^{2} \operatorname{Res}(f(z); z_i).$$

Pri tome je

$$\operatorname{Res}(f(z); z_i) = \lim_{z \to z_i}(z - z_i)\frac{\sqrt{z}}{1+z^3} = \frac{\sqrt{z_i}}{3z_i^2},$$

Računajući gornje vrijednosti dobijamo da je

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz$$

$$= \int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=0}^{2} \operatorname{Res}(f(z); z_i) = \frac{2\pi}{3}.$$

Ako dopustimo da $r \to 0$ i $R \to +\infty$, imamo

$$2I = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx = \frac{2\pi}{3},$$

odnosno

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx = \frac{\pi}{3},$$

Primjer 7.7. Ilustrovaćemo kako se pomoću integrala komleksne funkcije mogu računati neke sume. Konkretnije, dokazaćemo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Posmatrajmo funkciju $f(z) = \frac{\pi \cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}$ i kvadrat Γ_N čija su tjemena $(\pm 1 \pm i)(N+1/2)$. Izolovani singulariteti funkcije f su prosti polovi $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots,$ dok je nula pol reda tri. Pri tome, ako $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, tada je

$$\mathrm{Res}(f(z); k) = \lim_{z \to k} [\frac{z-k}{\sin \pi z} \cdot \frac{\pi \cos \pi z}{z^2}] = \pi \cos k\pi \cdot \frac{\pi \cos k\pi}{k^2} = \frac{1}{k^2}.$$

i

$$\mathrm{Res}(f(z); 0) = \lim_{z \to 0} \left[\frac{1}{2!} (z^3 f(z))'' \right] = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} (\pi z \cot \pi z)'' = \frac{\pi^2}{3}$$

pa je

$$\int_{\Gamma_N} f(z) dz = 2\pi i \left(2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{3} \right)$$

Pri tome je

$$\left| \int_{\Gamma_N} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \Gamma_N} |f(z)| \int_{\Gamma_N} \lim_{z \to 0} |dz \lim_{z \to 0}| = M \frac{4(2N+1)\pi}{(N+1/2)^2} \to 0$$

kada $N \to +\infty$, odakle slijedi da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

8 Primjena logaritamskog reziduma

Logaritamskim izvodom funkcije f naziva se funkcija

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz}(\ln f(z)).$$

Svaki izolovani singularitet funkcije f je izolovani singularitet funkcije φ. Pored toga, i nule funkcije f su izlovani singulariteti funkcije φ. Zbog toga je prirodno da rezidum funkcije φ sadrži informaciju o nulama i singularitetima funkcije f.

Teorema 8.1. *Neka je $D \subseteq \mathbb{C}$ oblast u kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$, $A = \{z_1, \ldots, z_k\} \subseteq D$ skup polova reda $m_1, \ldots, m_k$ funkcije f u skupu D, a $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ skup nula reda $l_1, \ldots, l_n$ iste funkcije u oblasti D. Ako je f analitička u oblasti $D \setminus A$, a $\Gamma \subseteq D$ kontura koja obuhvata sve polove i sve nule funkcije f onda je*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

Dokaz. Iz uslova teoreme slijedi da je funkcija

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

analitička na skupu $D \setminus (A \cup B)$. Pri tome, za svako $j \in \{1, \ldots, n\}$, postoji okolina $O_j = \{z \in C : |z - a_j| < r_j\}$ tačke a_j, takva da za $z \in O_j$ važi jednakost: $f(z) = (z - a_j)^{l_j} g(z)$, gdje je funkcija g analitička u O_j i $g(a_j) \neq 0$. Odavde slijedi da je za $z \in O_j$,

$$\varphi(z) = \frac{l_j}{z - a_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

To znači da je $z = a_j$ pol prvog reda funkcije φ, pa je $\mathrm{Rez}(\varphi; a_j) = l_j$.

Dalje, za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$ postoji $r_i > 0$, takvo da ako $z \in K_i = \{z \in C : 0 < |z - z_i| < r\}$, tada je

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_i)^{m_i}}, h(z_i) \neq 0.$$

Pri tome je z_i otklonjiv singularitet funkcije h, pa je za $z \in K_i$,

$$\varphi(z) = \frac{-m_i}{z - z_i} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

To znači pa je i tačka z_i pol prvog reda funkcije φ, a $\operatorname{Res}(\varphi; z_i) = -m_i$. Prema teoremi o rezidumu, odavde slijedi da je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

$\square$

Prethodna teorema ima zanimljivu geometrijsku interpretaciju.

Teorema 8.2 (Princip argumenta)**.** *Ako su ispunjeni uslovi prethodne teoreme, onda je razlika $\sum_{i=1}^n l_i - \sum_{i=1}^k m_i$ izmedju broja nula i broja polova funkcije f jednaka broju obilazaka krive $\gamma = f(\Gamma)$ za jedan obilazak krive Γ.*

Dokaz. Pošto je

$$\sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{k} m_i = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz,$$

dovoljno je dokazati da je integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

jednak broju obilazaka krive γ. Dalje, iz jednakosti $\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z)$, slijedi da je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d \ln f(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg f(z)|_\Gamma,$$

gdje je sa $\Delta \arg f(z)|_\Gamma$ označena promjena argumanta vrijednosti funkcije f kada se obidje kontura Γ. Odavde, s obzirom da se obilaskom krive γ argument $f(z)$ promijeni za 2π, slijedi tvrdjenje teoreme. $\square$

Primjedba 8.3. Tvrdjenje teoreme važi i ako se pretpostavi da je funkcija f analitička u $D \setminus A$ i neprekidna na $\overline{D} \setminus A$, a kontura Γ ograničava oblast D.

Za dokaz još jedne teoreme o broju nula analitičke funkcije, potreban je jedan pomoćni rezultat.

Lema 8.4. *Ako su $\gamma_1 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ i $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ dio po dio glatke zatvorene krive i $a \in \mathbb{C}$ kompleksan broj takav da je*

$$(\forall t \in [\alpha, \beta])\ |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |a - \gamma_1(t)| + |a - \gamma_2(t)|,$$

onda je

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(a) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(a).$$

Dokaz. Iz uslova leme slijedi da tačka a ne pripada nijednoj od krivih $\gamma_1^* = \{\gamma_1(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ i $\gamma_2^* = \{\gamma_2(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$, pa je funkcija

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t) - a}{\gamma_2(t) - a}$$

definisana na $[\alpha, \beta]$. Pri tome važi

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma} = \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t) - a} - \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t) - a}.$$

Iz uslova leme slijedi da je $|1 - \gamma(t)| < 1 + |\gamma(t)|$, za svako $t \in [\alpha, \beta]$. To znači da kriva $\gamma^* = \{\gamma(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ pripada uglu $\Delta = \{z : -2\pi/3 < \arg z < 2\pi/3\}$ koji je prosto povezana oblast u $\mathbb{C}$. Funkcija

$$h(z) = \ln(z) = \int_1^z \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$$

je definisana i analitička na Δ i pri tome je $h'(z) = 1/z$. Dalje, odavde, uzimajući u obzir da je γ zatvoren put, dobijamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_\gamma(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 h'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{d}{dt}(h(\gamma(t)))\mathrm{d}t = h(\gamma(\beta)) - h(\gamma(\alpha)) = 0.\end{aligned}$$

Odavde i iz definicije indeksa krive slijedi da je $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(a) - \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(a) = 0$, odnosno $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(a) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(a)$. □

Teorema 8.5 (Roucheova teorema)**.** *Neka su funkcije $f : D \mapsto \mathbb{C}$ i $g : D \mapsto \mathbb{C}$ analitičke u oblasti D i $\Gamma \subseteq D$ kontura koja obuhvata oblast $\Omega \subseteq D$. Ako je za svako $z \in \Gamma$, $|f(z)+g(z)| < |f(z)|+|g(z)|$, onda funkcije f i g imaju isti broj nula u Ω.*

Dokaz. Napomenimo da se u iskazu teoreme podrazumijeva da se svaka nula računa onoliko puta kolika je njena višestrukost.

Broj nula funkcije f i broj nula funkcije g označimo sa $N(f)$ i $N(g)$. Neka je $\gamma_1 = f(\Gamma)$ i $\gamma_2(s) = g(\Gamma)$. Ispunjeni su uslovi prethodne leme (za $a = 0$), pa je $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0)$. S druge strane je

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

i

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g'(z)}{g(z)}\,dz.$$

Odavde, s obzirom da je prema teoremi 8.1 $N(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ i $N(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g'(z)}{g(z)}dz$, slijedi da je $N(f) = N(g)$. □

U formi posljedica dajemo još dvije formulacije Roucheove teoreme.

Posljedica 8.6. *Neka su funkcije $f : D \to \mathbb{C}$ i $g : D \mapsto \mathbb{C}$ analitičke u oblasti D i $\Gamma \subseteq D$ kontura koja obuhvata oblast $\Omega \subseteq D$. Ako je za svako $z \in \Gamma$, $|g(z)| < |f(z)|$, onda funkcije f i $F = f + g$ imaju isti broj nula u Ω.*

Dokaz. Iz uslova slijedi da, za svako $z \in \Gamma$, važi

$$|g(z)| - |-f(z)| < 0 \leq |f(z) + g(z)| = |F(z)|,$$

pa je

$$|F(z)| + |-f(z)| > |g(z)| = |F(z) + (-f(z))|, \text{ za svako } z \in \Gamma.$$

Odavde, primjenom Roucheove teoreme, zaključujemo da funkcije F i $-f$ imaju isti broj nula u Ω. □

Posljedica 8.7. *Neka su funkcije $f : D \to \mathbb{C}$ i $g : D \mapsto \mathbb{C}$ analitičke u oblasti D i $\Gamma \subseteq D$ kontura koja obuhvata oblast $\Omega \subseteq D$. Ako za svako $z \in \Gamma$ važi $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, onda funkcije f i g imaju isti broj nula u Ω.*

Dokaz. Primjenom prethodne posljedice na par funkcija f i $G = g - f$, dobijamo da funkcije f i $G + f = g$ imaju isti broj nula u Ω. $\square$

I jedno svojstvo univalentntih funkcija može se izvesti kao posljedica Roucheove teoreme.

Posljedica 8.8. *Ako je funkcija $f : D \mapsto \mathbb{C}$ univalentna u oblasti D onda je, za svako $z \in D$, $f'(z) \neq 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $z_0 \in D$, takvo da je $f'(z_0) = 0$. Tada je z_0 izolovana nula funkcije f'. U nekoj okolini $O(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ tačke z_0 funkciju f možemo razložiti u Taylorov red:

$$f(z) = c_0 + c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots = c_0 + (z - z_0)^k h(z),$$

gdje je $k \geq 2$ i $c_k \neq 0$, $h(z) = c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \cdots$. Pri tome je $h(z_0) \neq 0$, pa postoji $\delta > 0$, takvo da važi:

$$((\forall z \in D)\ 0 < |z - z_0| < \delta) \Longrightarrow f'(z) \neq 0,$$

$$((\forall z \in D)\ |z - z_0| \leq \delta) \Longrightarrow (h(z) = c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \cdots \neq 0)\,.$$

Odavde slijedi da je $m = \min\{|c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \cdots| : |z - z_0| = \delta\} > 0$. Posmatrajmo funkcije

$$\varphi(z) = (z - z_0)^k h(z) = f(z) - c_0,\ \psi(z) = -\alpha + \varphi(z),$$

gdje je $0 < |\alpha| < m \cdot c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \cdots$. Ove funkcije na krugu $|z - z_0| \leq \delta$ zadovoljavaju uslove Roucheove teoreme. Broj nula funkcije φ u krugu $|z - z_0| < \delta$ jednak je n, pa je i broj nula funkcije ψ jednak n, i sve nule su proste. To znači da postoji $n \geq 2$ tačaka skupa D koje pripadaju krugu $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$, za koje je $f(z) = c_0 + \alpha$. To medjutim nije moguće, jer je, prema pretpostavci, funkcija f univalentna. $\square$

Posljedica 8.9 (Osnovni stav algebre)**.** *Polinom $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$ nad poljem kompleksnih brojeva ima tačno n nula.*

Dokaz. Ovu značajnu teoremu dokazali smo ranije. Dokaz koji ćemo ovdje prezentirati zasnovan je na primjeni Roucheove teoreme.

Primijetimo da je

$$
\begin{aligned}
|P_n(z)\ | &= |a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\
&= |a_n z^n \left(1 + b_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + b_1 \frac{1}{z^{n-1}} + b_0 \frac{1}{z^n}\right)| \\
&\geq |a_n z^n \left(1 - \left|b_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + b_1 \frac{1}{z^{n-1}} + b_0 \frac{1}{z^n}\right|\right) \\
&\geq |a_n z^n (1 - |b_{n-1}|\frac{1}{|z|} - \cdots - b_1 \frac{1}{|z^{n-1}|} - b_0 \frac{1}{|z^n|})|,
\end{aligned}
$$

gdje je $b_i = a_i/a_n$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Pošto postoji $r > 0$, takvo da za $|z| \geq r$ važi

$$
|b_{n-1}|\frac{1}{|z|} + \cdots + b_1 \frac{1}{|z^{n-1}|} + b_0 \frac{1}{|z^n|} < \frac{1}{2},
$$

tada za $|z| \geq r$ važi

$$
|P_n(z)| > \frac{|a_n z^n|}{2}.
$$

Neka je $g(z) = P_n(z), f(z) = -a_n z^n$. Tada za $z \in \Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ važi

$$
\begin{aligned}
|f(z) + g(z)| &= |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\
&= |a_n z^n||b_{n-1}|\frac{1}{|z|} + \cdots + b_1 \frac{1}{|z^{n-1}|} + b_0 \frac{1}{|z^n|} \\
&\leq |a_n z^n|(|b_{n-1}|\frac{1}{|z|} + \cdots + b_1 \frac{1}{|z^{n-1}|} + b_0 \frac{1}{|z^n|} \\
&< \frac{|a_n z^n|}{2} < |a_n z^n| < |f(z) + |g(z)|.
\end{aligned}
$$

Odavde, primjenom Roucheove teoreme, zaključujemo da funkcije $g(z) = P_n(z)$ i $f(z) = -a_n z^n$ imaju isti broj nula u $\Omega = \{z \in C : |z| < r\}$. Taj broj nula jednak je n, što znači da polinom P_n ima n nula u $\mathbb{C}$. □

Primjer 8.10. Dokažimo da jednačina $3 + z^2 = ze^{iz}$ ima tačno jedno rješenje u otvorenoj gornjoj poluravni. Posmatrajmo funkcije $f(z) = 3 + z^2$ i $g(z) = -ze^{iz}$. Neka je $\Omega = \{z : |z| \leq R, \mathrm{Im}\ z \geq 0$ polukrug u gornjoj poluravni, poluprečnika $R > \sqrt{5}$. Tada za $z \in [-R, R]$, $|f(z)| \geq 3 >$

$|g(z)| = 2$. Dalje, za $z = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$ važi: $|f(z)| \geq R^2 - 3 > 2$, $|g(z)| = 2e^{-R\sin t} \leq 2$. Prema Roucheovoj teoremi, funkcija $f + g$ u polukrugu Ω ima isti broj nula kao i funkcija f, dakle jednu. Pošto je R proizvoljan broj veći od $\sqrt{5}$, odavde slijedi da jednačina $3 + z^2 = ze^{iz}$ ima tačno jednu nulu u gornjoj poluravni.

Zadaci

1. Izračunati integrale

   a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^n + 1}$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^4+1)}$, c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n}$.

2. Izračunati integrale

   $a)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x(x^2+1)}$,

   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+1)^3}$,

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \pi x/2 dx}{x^2 - 1}$,

   d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos nx dx}{1 - a\cos x}, a \in (-1, 1)$.

3. Izračunati integrale

   a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \ln x dx}{x^2 + 1}$,

   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x}$,

   c) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1} dx$.

4. Dokazati da je

   a) $\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} = \frac{\pi(\beta - \alpha)}{2} (\alpha, \beta > 0)$, b) $\int_0^{\infty} \cos x^2 \, dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\pi/8}$, c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx`}{(x^2+1)\sqrt{x}} = \pi\sqrt{2}/2$.

5. Dokazati jednakosti

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a \ (a > 0)$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

6. Neka je a prosti pol funkcije f, koja je analitička u prstenu $\{z : 0 < |z-a| < R\}, R > 0$, $b = \text{Res}(f; a)$ i $\varphi(t) = a + re^{it}, 0 < r < R, t \in [t_0, t_1], 0 \leq t_0 < t_1 \leq 2\pi$. Dokazati da je tada
$$\lim_{r \to 0} \int_{|z-a|=r} f(z)dz = ib(t_1 - t_0).$$

7. Odrediti broj nula polinoma $P_5(z) = z^5 + 5z^3 + 2z$ a) u krugu $|z| < 1$; b) u prstenu $1 \leq |z + | < 2$; c) u prstenu $2 \leq |z| < 3$.

8. Odrediti broj rješenja jednačine $P(z) = 0$ u oblasti D ako je

   a) $P(z) = z^4 - 9z + 1,\ D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$,

   b) $P(z) = z^{2n} + 4z^{2n-1} + 1 + 1 = 0,\ D = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\ z > 0\}$.

9. Dokazati da za veliko $n \in \mathbb{N}$ jednačina
$$2 - 2 \cdot 3z + 3 \cdot 4z^2 + \cdots + (-1)^n (n+1)(n+2)z^n = 0$$
nema rješenja u oblasti $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

10. Dokazati da jednačine a) $z \sin z = 1$ i b) $\tan z = z$ imaju samo realna rješenja.

11. Dokazati da za $R > 0$ i dovoljno veliko N jednačina
$$\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} = 0$$
nema rješenja u krugu $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$.

12. Dokazati da jednačina $z \cos z = 0$ ima tačno dva rješenja koja nisu realna.

13. Neka je λ realan broj veći od 1. Dokazati da jednačina $z + e^{-z} = \lambda$ u otvorenoj desnoj poluravni ima tačno jedno rješenje i da je to rješenje realan broj.